前処理付反復法の比較定理 (偏微分方程式の数値解法とその周辺II)

AUTHOR(S):

河野, 敏行; 仁木, 滉

数理解析研究所講究録
1198 巻 2001 年 179-185

前処理付反復法の比較定理

岡山理科大学 総合情報学部 河野敏行 (Toshiyuki Kohno)
仁木滉 (Hiroshi Niki)
Faculty of Informatics,
Okayama University of Science

1 はじめに

次の前処理化線形方程式に，Gauss-Seidel 反復法の適用を考える．

$$PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$$

ここで，$A \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ は既約優対角な $\boldsymbol{Z}$ 行列，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^{n}$ である．そして P は前処理行列であり，正則である．このとき，反復公式は係数行列の分離 $PA = M_p - N_p$ に対して，

$$M_p\boldsymbol{x}^{(k+1)} = N_p\boldsymbol{x}^{(k)} + Pb$$

と表される．小武守らは前処理行列 P として $P_\beta = (I + \beta U)$ を用いる方法を提案した [6]．ここで，前処理を用いるために行列 A は，$A = I - L - U$ と分離可能な行列とする，ただし，I は単位行列，L，U はそれぞれ狭義下三角，狭義上三角行列である．この前処理において，β はある正の実数であり，$\beta = 1$ の場合，$P_1A = (I+U)A = I - L - UL - U^2$ と展開される．そして $UL = D + E + F$ と分解する．ただし，D, E, F はそれぞれ，UL の対角，狭義下，狭義上三角要素である．

これまでの比較定理は James の上界公式 [1] を用いて収束定理を導いており，大変複雑なものであった．今回，我々は I. Marek と D. B. Szyld の比較定理 [2] を利用することによって，係数行列 A が既約優対角 Z 行列であるときの明快な証明を導いた．

2 前処理行列 $(I + \beta U)A$ について

比較定理を示すために，β の振る舞いについて必要な議論を行う．まず，ある正のパラメータ β に対して，前処理付係数行列 A_β は次のように表される，

$$A_\beta \;=\; (I - \beta D - (L + \beta E)) - (U - \beta U + \beta F + \beta U^2).$$

[6] において A_β が対角優位行列となるようにパラメータ β の上限 β' を定めている．さらに，彼らは最適 β の推定法を開発した．この論文で用いる β の範囲は $\beta < \beta'$ かつ $I - \beta D > 0$ を満たすものとする．$I - \beta D \neq 0$ のとき $(I - \beta D - (L + \beta E))^{-1}$ が存在し，A_β に対する Gauss-Seidel 反復行列 T_β は，

$$T_\beta = (I - \beta D - (L + \beta E))^{-1}(U - \beta U + \beta F + \beta U^2),$$

と表される．ここで，$M_\beta = I - \beta D - (L + \beta E), N_\beta = U - \beta U + \beta F + \beta U^2$ と置く．そして N_β の (i,j) 要素の値を $(N_\beta)_{ij}$ と表す．このとき $(N_\beta)_{ii+1}$ は $(U - \beta U + \beta F)_{ii+1}$ となり，$(\beta U)_{ii+1} > (U + \beta F)_{ii+1}$ のとき $(N_\beta)_{ii+1}$ の値は非負とならず，$A_\beta \notin \boldsymbol{Z}$ である．このとき，A_β の要素は $a_{\beta,ij} = a_{ij} - \beta \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}a_{kj}$ と表される．そして，A_1 の $(n-1,n)$ の要素は次式で示すように零となる．

$$\begin{aligned} a_{1,n-1n} &= a_{n-1n} - a_{n-1n}a_{nn} \\ &= a_{n-1n} - a_{n-1n} = 0 \end{aligned}$$

しかし，A_β の $(n-1,n)$ の要素は $a_{n-1n} \neq 0$ のとき，次式で示すように正の値をもつ．

$$\begin{aligned} a_{\beta,n-1n} &= a_{n-1n} - \beta a_{n-1n}a_{nn} \\ &= (1-\beta)a_{n-1n} > 0 \end{aligned}$$

従って，$(n-1)$ 行の対角優位度は A_1 の対角優位度よりも良いとは限らない．このことから $(n-1,n)$ 行目にのみ $\beta = 1$ と置き，議論する．
本論文において，収束するための β の範囲については [6] を利用し，これ以上の詳しい議論は行わない．

3 記法と補助定理

次の定理と定義を用いて，前処理付 Gauss-Seidel 反復法の比較定理を導く．
$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$ の全ての要素に対して $a_{ij} \leq b_{ij}$ のとき，$A \leq B$ と書く．そして，$A \geq O$ のとき A を非負行列と呼ぶ．$A = (a_{ij})$ が $i \neq j$ に対して，$a_{ij} \leq 0$ を満たす行列を Z 行列と呼び，$A \in \boldsymbol{Z}^{n \times n}$ と表す．正則行列 A が $A^{-1} \geq O$ を満たすとき，M 行列と呼ぶ．さらに，$A = (a_{ij})$ が $i = j$ に対して $|a_{ij}|$，非対角要素に対して $-|a_{ij}|$ と置いた行列を比較行列と呼び，$< A >$ と表す．$< A >$ が M 行列のとき，A は H 行列という．

定義 3.1 [3] A を実行列とする．$A = M - N$ を A の分離とする，ただし，M は正則行列である．このとき，次の分離を定義する．

(i) $\rho(M^{-1}N) < 1$ のときは，収束分離．
(ii) $M^{-1} \geq O$ かつ $N \geq O$ のときは，正則分離．
(iii) $M^{-1} \geq O$ かつ $M^{-1}N \geq O$ のとき，弱正則分離．
(iv) M が *M-matrix* かつ $N \geq O$ のとき，M 分離．
(v) $< M > -|N|$ が *M-matrix* のとき，H 分離．
(vi) $< A > = < M > -|N|$ のとき，*H-compatible* 分離．

定義 3.2 A の分離 $A = M - N$ を $M = \widetilde{D} - \widetilde{E}$，$N = \widetilde{F}$ とおくとき，*Gauss-Seidel* 分離と呼ぶ．ただし，$\widetilde{D}$ は係数行列 A の対角要素，$\widetilde{E}, \widetilde{F}$ は A の狭義下三角，狭義上三角要素を表し，$A = \widetilde{D} - \widetilde{E} - \widetilde{F}$ と分離したものとする．そして，$(\widetilde{D} - \widetilde{E})^{-1} \geq O$ かつ $\widetilde{F} \geq O$ ならば，A を *Gauss-Seidel* 正則分離と呼ぶ．

定理 3.3 [3] A を $A = M - N$ 分離とする．このとき，次の条件が成立する．

(i) 正則もしくは，弱正則分離のとき，$\rho(M^{-1}N) < 1$ となるための必要十分条件は $A^{-1} \geq O$ である．
(ii) A が M 分離のとき，$\rho(M^{-1}N) < 1$ となる必要十分条件は A が M 行列であることである．
(iii) A が H 分離のとき，A と M は H 行列であり，$\rho(M^{-1}N) \leq \rho(< M >^{-1} |N|) < 1$ である．
(iv) A が M 分離のとき，A は正則分離である．
(v) A が M 分離かつ M 行列のとき，A は H 分離かつ *H-compatible* 分離である．
(vi) A が *H-compatible* 分離かつ H 行列のとき，A は H 分離かつ，収束分離である．

定理 3.4 [5] $A \in \boldsymbol{Z}^{n\times n}$ を既約行列とする．このとき，以下の条件は，A が正則な M 行列であることと等価である．

(i) $A^{-1} \geq \boldsymbol{O}$.
(ii) $\boldsymbol{x} > 0$ に対して $A\boldsymbol{x} \geq 0$.

補題 3.5 [3] $T \geq O$ に対して，$T\boldsymbol{x} \leq \alpha\boldsymbol{x}$ を満たす $\boldsymbol{x} > 0$ と $\alpha > 0$ が存在するとき，$\rho(T) \leq \alpha$ を満たす．さらに，$T\boldsymbol{x} < \alpha\boldsymbol{x}$ ならば，$\rho(T) < \alpha$ である．

定理 3.6 [7] $A = M - N$ を A の正則分離とする．このとき A が $A^{-1} \geq O$ であるための必要十分条件は $\rho(M^{-1}N) < 1$ すなわち，

$$\rho(M^{-1}N) = \frac{\rho(A^{-1}N)}{1+\rho(A^{-1}N)} < 1$$

である．

定理 3.7 [2] $A_1 = M_1 - N_1$ と $A_2 = M_2 - N_2$ を 2 つの弱正則分離とする，そして各反復行列 $T_1 = M_1^{-1}N_1$，$T_2 = M_2^{-1}N_2$ は性質 "d"を持つと仮定する．そして，$\boldsymbol{x} \geq 0$，$\boldsymbol{z} \geq 0$，$T_1\boldsymbol{x} = \rho(T_1)\boldsymbol{x}$，$T_2 = \rho(T_2)\boldsymbol{z}$ とおく．このとき，

$$M_1^{-1} \geq M_2^{-1}$$

かつ $(A_1 - A_2)\boldsymbol{x} \geq 0$，$A_1\boldsymbol{x} \geq 0$ また $(A_1 - A_2)\boldsymbol{z} \geq 0$，$A_1\boldsymbol{z} \geq 0$ $\boldsymbol{z} \geq 0$ を満たすとき，

$$\rho(T_1) \leq \rho(T_2)$$

が成立する．さらに $M_1^{-1} > M_2^{-1}$ かつ $N_1 \neq N_2$ のとき

$$\rho(T_1) < \rho(T_2)$$

である．

4　比較定理

比較定理を導くために必要な補題を与える．

補題 4.1 A を *Gauss-Seidel* 正則分離，$A_1 = (I+U)A = M_1 - N_1$ と置く．ここで $M = I - L$，$M_1 = I - D - (L+E)$ である．このとき，

$$M_1^{-1} \geq M^{-1} \geq 0 \tag{1}$$

が成立する．